L.7.11 Sahline | A.S :2008/2009

Devoir de synthèse N°1

Durée : 2.h

Exercice N°1(4pts)

1) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe : $u = 3 - 4i$

b) Résoudre dans ℂ l'équation d'inconnue Z suivante (E) : $Z^2 - (4 + 2i)Z + 8i = 0$

c) En déduire les solutions dans ℂ de l'équation (E') : $Z^4 - (4 + 2i)Z^2 + 8i = 0$

2) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$, construire les images des solutions de l'équation (E') et montrer que ces points forment un parallélogramme

Exercice N°2(5pts)

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $R = (o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_1 = (1+i)\sin\theta$, $Z_2 = 2\sin\theta$ et $Z_3 = (1-i)\sin\theta$

1) Déterminer l'ensemble des points A lorsque θ varie.

2) a) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{Z_3}{Z_1}$

b) En déduire la nature du triangle OAC

3) a) Montrer que le quadrilatère OABC est un carré.

b) Pour quelle valeur de θ l'aire de OABC est égale à $\frac{3}{2}$

c) Pour quelle valeur de θ l'aire de OABC est maximale.

Exercice N°3(6pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

b) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que pour tout réel x : $f(x) > 0$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) \leq 1$

a) En déduire le tableau de variation de g.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left]\sqrt{3}, 2\right[$

c) En déduire la position relative de la courbe (ζ_f) de f et la droite $\Delta : y = x$

Exercice N°4(5pts)

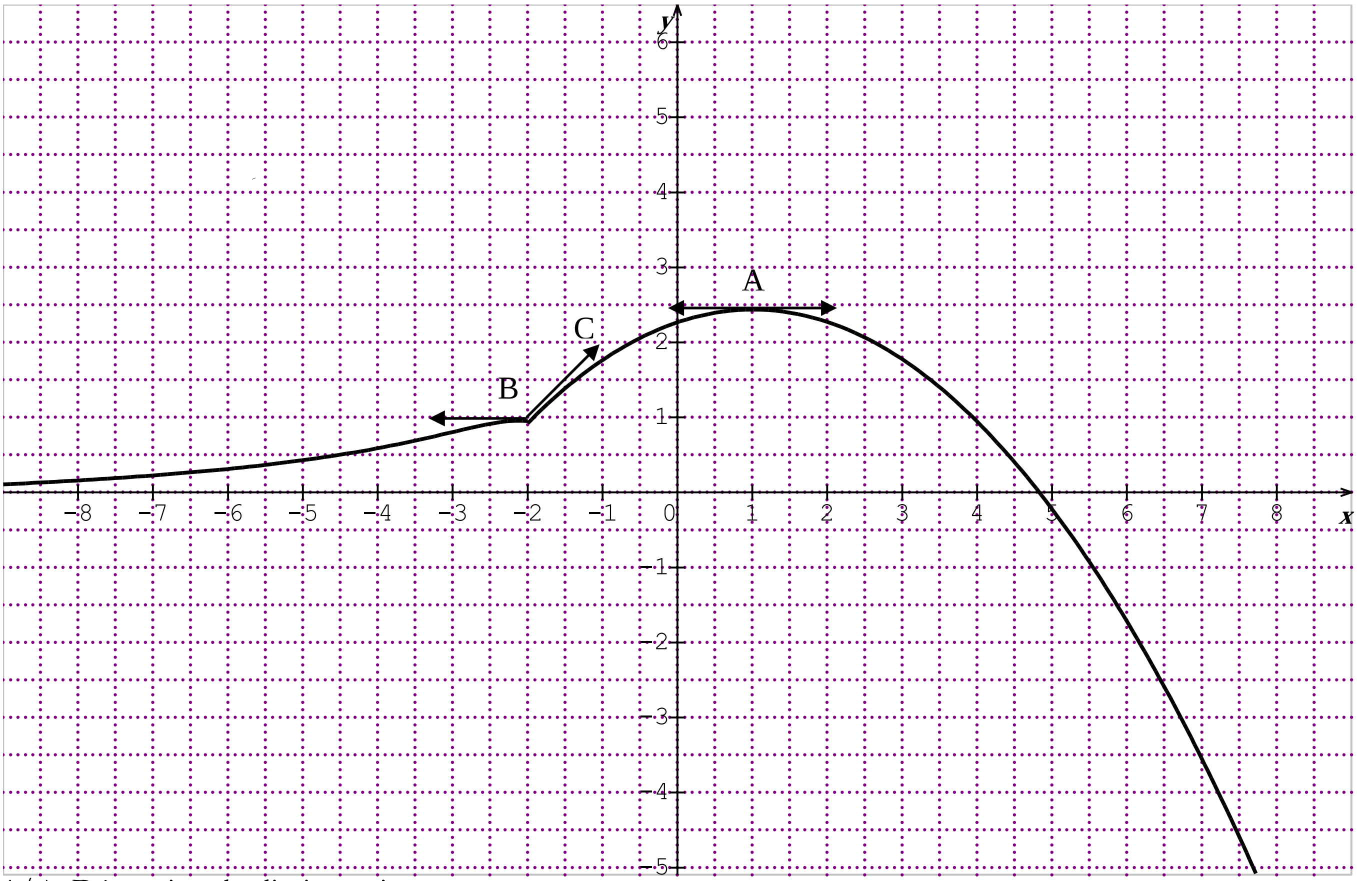
La courbe notée (C_f) donné en annexe, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

On sait que :

- l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $(-\infty)$
- La courbe (C_f) possède une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$
- la courbe (C_f) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(1, \frac{5}{2})$
- (C_f) admet en B(-2,1) deux demi- tangentes : une parallèle à l'axe des abscisses et l'autre passe par le point C(-1,2)

Par une lecture graphique répondre aux questions :

Nom et prénom :………………………………….   Classe :…… Annexe (à rendre avec la copie)



1/a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$………., $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$…….., $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$………

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{f(x)-1}{x+2} =$………, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{f(x)-1}{x+2} =$………, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-\frac{5}{2}}{x-1} =$………..

f est-elle dérivable en (-2) ? …………………………………………………………………

2/ Compléter le tableau de variation de f .

x	
f '(x)	
f(x)	

3/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ [sur un intervalle J que l'on précisera.

……

b) Tracer la courbe de g^{-1} (fonction réciproque de g) dans le repère contenant (C_f).

c) La fonction g^{-1} est elle dérivable à gauche en $\dfrac{5}{2}$. ………………………………….

d) Donner $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} \dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(\frac{5}{2})}{x - \frac{5}{2}} =$………..